

Chapitre 7 : Matrices symétriques

7.1 Diagonalisation et théorème spectral

Rappels

1. Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. S'il existe des matrices $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible et $D \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ diagonale telles que

$$A = PDP^{-1},$$

alors A est semblable à une matrice diagonale et on dit que A est *diagonalisable*.

2. La matrice A est diagonalisable si et seulement s'il existe n vecteurs propres de A linéairement indépendants.

Soient $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ les n vecteurs propres linéairement indépendants. On a

avec $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$, où les λ_i sont les valeurs propres de A .

Si A est diagonalisable, $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A .

3. Le polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$ est défini par

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

$p_A(\lambda)$ est de degré n et admet n racines, pas nécessairement toutes réelles et pas forcément toutes distinctes. Les racines sont les valeurs propres de A . On peut factoriser

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

où les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A . On a

$$\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Exemple

Définition 70 (diagonalisable en base orthonormée).

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. On dit que A est *diagonalisable en base orthonormée* s'il existe P orthogonale et D diagonale telles que $A = PDP^T$.

Si A est diagonalisable en base orthonormale, alors on a

De plus, on remarque que

Théorème 72. *Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors deux vecteurs propres appartenant à des espaces propres distincts sont orthogonaux.*

Preuve

Remarque

Exemple

Cas particulier des matrices 2 x 2

Théorème 73. *Une matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est symétrique si et seulement si elle est diagonalisable en base orthonormale.*

Théorème 74 (Théorème spectral des matrices symétriques). *Soit une matrice symétrique $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors*

- 1. A admet n valeurs propres réelles pas forcément distinctes.*
- 2. Pour chaque valeur propre λ_i de A , on a*
- 3. A est diagonalisable en base orthonormale.*
- 4. Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*

Remarques

Exemples